

Bashing Geometry with Complex Numbers

用複數炸幾何

EVAN CHEN 《陳誼廷》

5月2日2014年

We show how complex numbers can be used to solve geometry problems.

1 複數的平面

令 \mathbb{C} 和 \mathbb{R} 分別為複數和實數的所形成的集合。

每一個複數 z 可寫成

$$z = a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

此處 $a, b, r, \theta \in \mathbb{R}$ 而 $0 \leq \theta < 2\pi$ 。我們寫 $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ 且 $\arg z = \theta$ 。

更主要，每個複數有一個複共軛 $\bar{z} = a - bi$ 。共軛滿足以下的方程：

$$\overline{w \pm z} = \bar{w} \pm \bar{z}$$

$$\overline{w \cdot z} = \bar{w} \cdot \bar{z}$$

$$\overline{w/z} = \bar{w}/\bar{z}$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

注意 $z \in \mathbb{R}$ 的充要條件為 $z = \bar{z}$ ，且 $z \in i\mathbb{R}$ 的充要條件為 $z + \bar{z} = 0$ 。

我們把平面上每一個點用一個複數表示。對每個點 Z 我們會用一個 $z \in \mathbb{C}$ 來代表（所以大寫的字代表點，小寫的字代表複數）。

複數的加減剛好跟向量一樣。乘法就比較有趣。對有任何 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ，我們有

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \text{ 和 } \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

我們可從該乘法看出其幾何意義。舉個例，對於任意點 Z 和 W ，我們可以對 W 把 Z 轉 90° ：

$$z \mapsto i(z - w) + w.$$

2 首先的命題

我們先談一些最主要的命題。

命題 1. 令 A, B, C, D 為兩兩相異的點。則 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ 的充要條件為 $\frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$; *i.e.*

$$\frac{d-c}{b-a} + \overline{\left(\frac{d-c}{b-a}\right)} = 0.$$

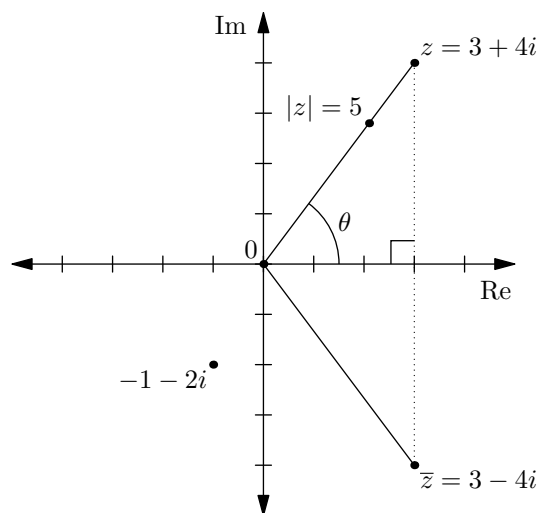


Figure 1: 平面上取了複數 $z = 3 + 4i$ 且 $-1 - 2i$; $\bar{z} = 3 - 4i$ 為 z 的共軛.

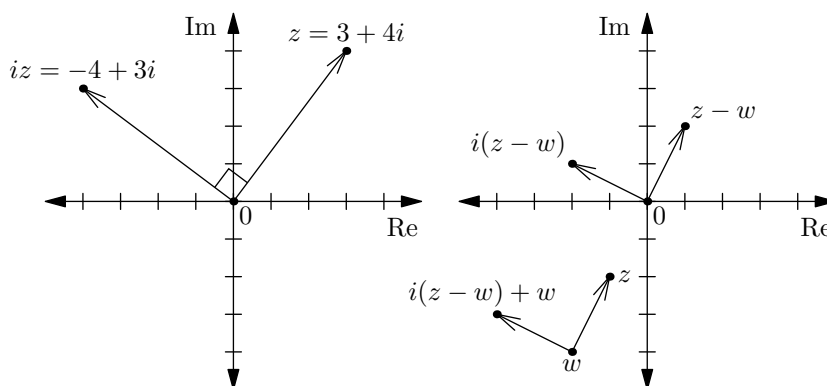


Figure 2: $z \mapsto i(z - w) + w$.

【證】 條件等價與 $\frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R} \iff \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \equiv \pm 90^\circ \iff \overline{AB} \perp \overline{CD}$. □

命題 2. 令 A, B, C 為兩兩異的點。則 A, B, C 共線的充要條件為 $\frac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$; *i.e.*

$$\frac{c-a}{c-b} = \overline{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)}.$$

【證】 跟以上的命題一樣。 □

命題 3. 令 A, B, C, D 為兩兩相異的點。則 A, B, C, D 共圓的充要條件為

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R}.$$

【證】 可得 $\arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right) = \angle ACB$, $\arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right) = \angle ADB$, (angles are directed). □

我們現在陳述一個比較常用的公式。

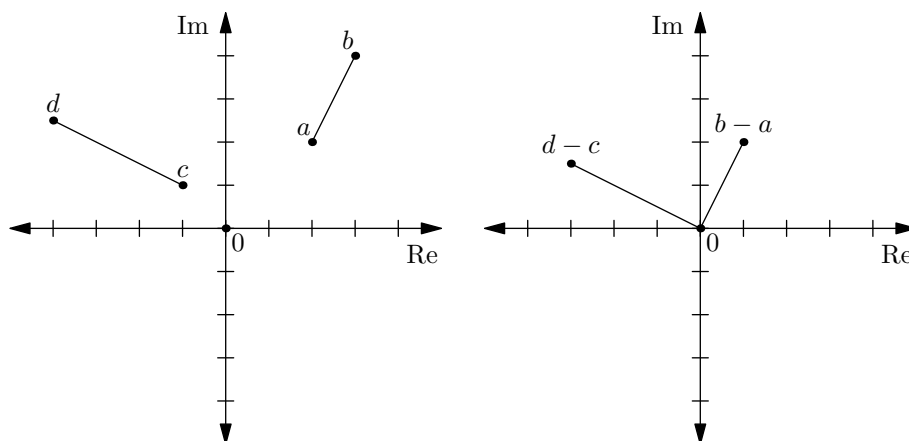


Figure 3: $\overline{AB} \perp \overline{CD} \iff \frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

引理 4 (對稱點). 設 W 為 Z 對一個 \overline{AB} 的對稱點。則

$$w = \frac{(a-b)\bar{z} + \bar{a}b - a\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}}.$$

當然這時候 Z 對 \overline{AB} 的垂足為 $\frac{1}{2}(w+z)$ 。

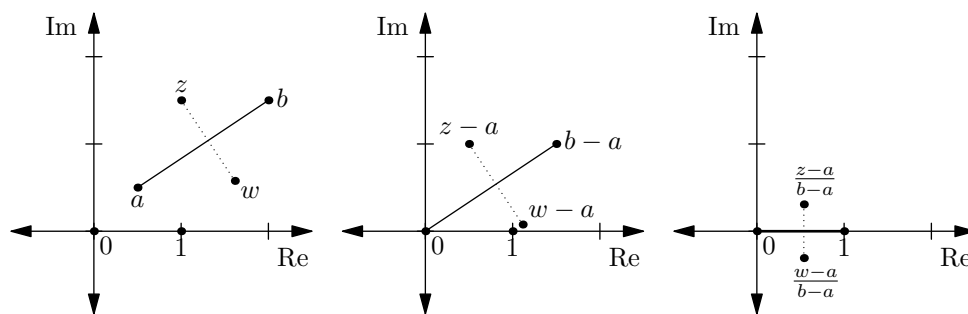


Figure 4: Z 對 \overline{AB} 的對稱點。

【證】 根據 Figure 4 我們可得

$$\frac{w-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{z-a}{b-a}\right)} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}.$$

從此可解 $w = \frac{(a-b)\bar{z} + \bar{a}b - a\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}}$ 。

□

我們再給兩條公式。

定理 5 (面積/共線的方程). 令 A, B, C 位點。則 $\triangle ABC$ 的面積為

$$\pm \frac{i}{4} \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}.$$

特別地， A, B, C 共線的充要條件為以上的行列式為零。

【證】 用直角座標來證。 □

定理 5 常常比命題 2 好用。
其實我們也可以把任意兩條線交叉。

命題 6. 令 A, B, C, D 為點。則 AB 和 CD 的交叉點位

$$\frac{(\bar{a}b - a\bar{b})(c - d) - (a - b)(\bar{c}d - c\bar{d})}{(\bar{a} - \bar{b})(c - d) - (a - b)(\bar{c} - \bar{d})}.$$

可是除非 $d = 0$ 或 a, b, c, d 在單位圓上，這方程不太好用。

3 單位圓和三角形的心

在複平面上，單位圓是很重要。根據以上，對於每個 $|z| = 1$ 我們有

$$\bar{z} = \frac{1}{z}.$$

利用上述，我們可得一下的引理。

引理 7. 若 $|a| = |b| = 1$ 且 $z \in \mathbb{C}$ ，則 Z 對 \overline{AB} 的對稱點為 $a + b - abz$ ，而 Z 對 \overline{AB} 的垂足為

$$\frac{1}{2}(z + a + b - abz).$$

引理 8. 若 A, B, C, D 落在單位圓上，則 \overline{AB} 和 \overline{CD} 的交叉點為

$$\frac{ab(c + d) - cd(a + b)}{ab - cd}.$$

這幾方程比以上的漂亮多了。在單位圓上，我們也可馬上得到一個三角形的心：

定理 9. 令 ABC 為三角形。假設 ABC 的外接圓為複平面的單位圓。則 ABC 的外心，重心，垂心分別為 $0, \frac{1}{3}(a + b + c), a + b + c$ 。

利用以上馬上可證 Euler 線的定理。

【證】 外心和垂心的方程是明顯的。令 $h = a + b + c$ 。只需證明 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ ，等等。我們可設

$$z = \frac{h - a}{b - c} = \frac{b + c}{b - c}.$$

則

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{b + c}{b - c}\right)} = \frac{\bar{b} + \bar{c}}{\bar{b} - \bar{c}} = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}} = \frac{c + b}{c - b} = -z$$

因此 $z \in i\mathbb{R}$ ，得證。 □

我們也其實可得到內心的方程。

定理 10. 令 I 和 Γ 分別為三角形 ABC 的內心和外接圓。令直線 AI, BI, CI 分別與 Γ 交叉在點 D, E, F 。若 Γ 為複平面的單位圓，則存在 $x, y, z \in \mathbb{C}$ 滿住

$$a = x^2, b = y^2, c = z^2 \text{ 且 } d = -yz, e = -zx, f = -xy.$$

注意 $|x| = |y| = |z| = 1$ 。將內心 I 為 $-(xy + yz + zx)$ 。

【證】 證明 I 為 $\triangle DEF$ 的垂心。 □

4 另外的公式

引理 11. 令 A, B 落在單位圓上，且取點 P 使得 $\overline{PA}, \overline{PB}$ 是切線。則

$$p = \frac{2}{\bar{a} + \bar{b}} = \frac{2ab}{a + b}.$$

【證】 設 M 為 \overline{AB} 的中點，且 $o = 0$ 。可證 $OM \cdot OP = 1$ 且 P 在射線 OM 上。 \square

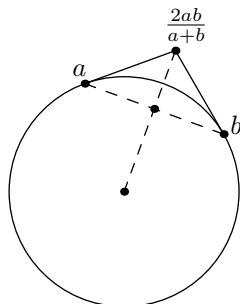


Figure 5: 兩條切線交叉。 $p = \frac{2}{\bar{a} + \bar{b}}$ 。

引理 12. 對於任意 x, y, z ，三角形 XYZ 的外心為

$$\begin{vmatrix} x & x\bar{x} & 1 \\ y & y\bar{y} & 1 \\ z & z\bar{z} & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} x & \bar{x} & 1 \\ y & \bar{y} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix}.$$

如需利用這個方程，可平移 z 到 0 ，在算行列式，最後在平移回來。這樣行列式就比較好算。

5 例子

例子 13 (MOP 2006). 令 H 為三角形 ABC 的垂心。取 D, E, F 在 ABC 的外接圓上，使得 $\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$ 。設 S, T, U 分別為 D, E, F 對 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的對稱點。試證 S, T, U, H 共圓。

【證】 設 (ABC) 為單位元，則 $h = a + b + c$ 。可不方假設 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 跟實軸垂直（要不然把 ABC 專一下...）。則 $d = \bar{a}$ ，等等。因此 $s = b + c - bc\bar{d} = b + c - abc$ ，等等。從此可得

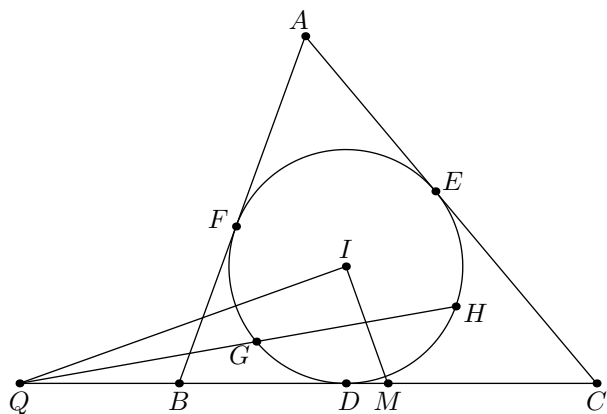
$$\frac{s-t}{s-u} = \frac{b-a}{c-a} \quad \text{且} \quad \frac{h-t}{h-u} = \frac{b+abc}{c+abc}.$$

算出

$$\frac{s-t}{s-u} : \frac{h-t}{h-u} = \frac{(b-a)(c+abc)}{(c-a)(b+abc)} = \frac{(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})(\frac{1}{c} + \frac{1}{abc})}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{a})(\frac{1}{b} + \frac{1}{abc})} \implies \frac{s-t}{s-u} : \frac{h-t}{h-u} \in \mathbb{R}$$

就得證。 \square

例子 14 (模擬競賽 2014). 設 $\triangle ABC$ 的內切圓圓心為 I ，且該內切圓分別與 $\overline{CA}, \overline{AB}$ 邊切於點 E, F 。令點 E, F 對 I 的對稱點分別為 G, H 。設點 Q 為 \overline{GH} 與 \overline{BC} 的交點，並設點 M 為 \overline{BC} 的中點。試證 \overline{IQ} 與 \overline{IM} 垂直。



【解】 令 D 為 I 對 \overline{BC} 的垂足，且設 (DEF) 為單位圓。(這讓我們可利用 §3 的引理) 則 $|d| = |e| = |f| = 1$ ，且 $g = -e, h = -f$ 。設 $x = \bar{d} = \frac{1}{d}$ ，類似定義 y, z 。則

$$b = \frac{2}{d+f} = \frac{2}{x+z}.$$

類似有 $c = \frac{2}{x+y}$ ，因此

$$m = \frac{1}{2}(b+c) = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} = \frac{2x+y+z}{(x+y)(x+z)}.$$

再來，我們有 $Q = DD \cap GH$ ，故

$$q = \frac{dd(g+h) - gh(d+d)}{d^2 - gh} = \frac{\frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{yz} \frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{yz}} = \frac{2x+y+z}{x^2 - yz}.$$

因此

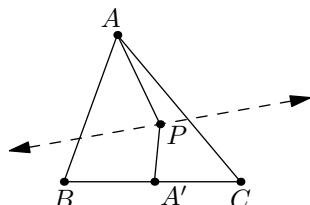
$$m/q = \frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)}.$$

則

$$\overline{m/q} = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{yz}}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right)} = \frac{yz - x^2}{(x+y)(x+z)} = -m/q$$

故 $m/q \in i\mathbb{R}$ ，得證。 □

例子 15 (USA 2012). 令 ABC 為三角形，並設 P 為任意一點且設 γ 為一條通過 P 的線。定義 A' 為直線 BC 與 \overline{PA} 對 γ 的對稱線的交叉點。類似定義 B' 和 C' 。試證： A', B', C' 三點共線。



【解】 設 $p = 0$ 且設 γ 為實軸。則 A' 是 bc 和 $p\bar{a}$ 的交叉點。從此，利用命題 6 可得

$$a' = \frac{\bar{a}(\bar{b}c - b\bar{c})}{(\bar{b} - \bar{c})\bar{a} - (b - c)a}.$$

注意

$$\bar{a}' = \frac{a(b\bar{c} - \bar{b}c)}{(b - c)a - (\bar{b} - \bar{c})\bar{a}}.$$

利用定理 5，我們需證

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{\bar{a}(\bar{b}c - b\bar{c})}{(b - \bar{c})\bar{a} - (b - c)a} & \frac{a(b\bar{c} - \bar{b}c)}{(b - c)a - (\bar{b} - \bar{c})\bar{a}} & 1 \\ \frac{\bar{b}(\bar{c}a - c\bar{a})}{(\bar{c} - \bar{a})\bar{b} - (c - a)b} & \frac{b(c\bar{a} - \bar{c}a)}{(c - a)b - (\bar{c} - \bar{a})\bar{b}} & 1 \\ \frac{\bar{c}(\bar{a}b - a\bar{b})}{(\bar{a} - \bar{b})\bar{c} - (a - b)c} & \frac{c(\bar{a}b - a\bar{b})}{(a - b)c - (\bar{a} - \bar{b})\bar{c}} & 1 \end{vmatrix}.$$

上述等價與

$$0 = \begin{vmatrix} \bar{a}(\bar{b}c - b\bar{c}) & a(b\bar{c} - \bar{b}c) & (\bar{b} - \bar{c})\bar{a} - (b - c)a \\ \bar{b}(\bar{c}a - c\bar{a}) & b(c\bar{a} - \bar{c}a) & (\bar{c} - \bar{a})\bar{b} - (c - a)b \\ \bar{c}(\bar{a}b - a\bar{b}) & c(\bar{a}b - a\bar{b}) & (\bar{a} - \bar{b})\bar{c} - (a - b)c \end{vmatrix}.$$

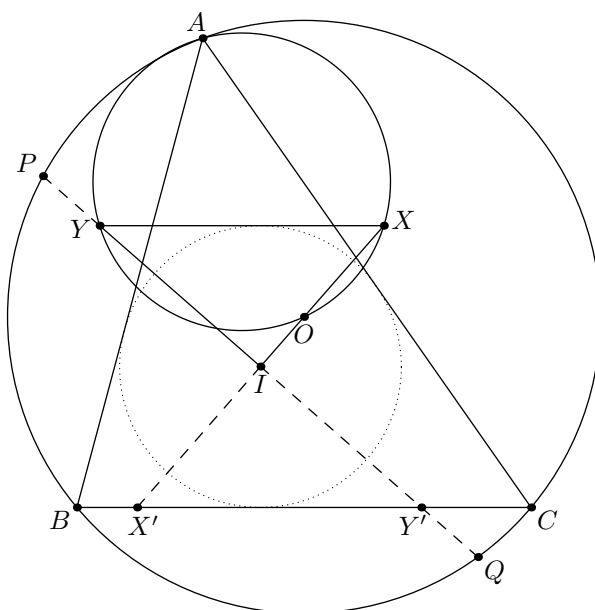
把行列式算出來，右邊這等於

$$\sum_{\text{cyc}} ((\bar{b} - \bar{c})\bar{a} - (b - c)a) \cdot - \begin{vmatrix} b & \bar{b} \\ c & \bar{c} \end{vmatrix} \cdot (\bar{c}a - c\bar{a})(\bar{a}b - a\bar{b})$$

或

$$(\bar{b}c - c\bar{b})(\bar{c}a - c\bar{a})(\bar{a}b - a\bar{b}) \sum_{\text{cyc}} (ab - ac + \bar{c}\bar{a} - \bar{b}\bar{a}) = 0. \quad \square$$

例子 16 (獨立研究 2014). 令 I 與 O 分別為三角形 ABC 的內心與外心。設 ℓ 為一條直線，為 ABC 的內接圓相切並於 \overline{BC} 平行。取 X, Y 在 ℓ 上使得 I, O, X 共線且 $\angle XIY = 90^\circ$ 。試證 A, X, O, Y 共圓。



【解】 設 X' 和 Y' 分別為 X 和 Y 對 I 的對稱點。注意 X, Y 落在 \overline{BC} 上。再來，設 P, Q 為 \overline{IY} 和 ABC 的外接圓的交叉點。

令 (ABC) 為複平面的單位元。設 j 為 I 的複數（所以不會跟 $i = \sqrt{-1}$ 搞混）。則

$$x' = \frac{(\overline{bc} - b\overline{c})(j - 0) - (\overline{j}0 - j\overline{0})(b - c)}{(\overline{b} - \overline{c})(j - 0) - (b - c)(\overline{j} - \overline{0})} = \frac{j \cdot \frac{c^2 - b^2}{bc}}{j \cdot \frac{c - b}{bc} - (b - c)\overline{j}} = \frac{j(b + c)}{j + bc\overline{j}}.$$

我們在求 y' 。考慮以下 z 的二次方程：

$$\frac{z - j}{j} + \frac{\frac{1}{z} - \overline{j}}{\overline{j}} = 0 \iff z^2 - 2jz + j/\overline{j} = 0.$$

以上的零點剛好為 p 和 q ，故 $p + q = 2j$ 而 $pq = j/\overline{j}$ 。因此個算

$$y' = \frac{pq(b + c) - bc(p + q)}{pq - bc} = \frac{j(b + c) - 2bcj\overline{j}}{j - bc\overline{j}} = \frac{j(b + c) - 2bcj\overline{j}}{j - bc\overline{j}}.$$

將可得

$$x = 2j - x' = \frac{j(2j - b - c + 2bc\overline{j})}{j + bc\overline{j}} \quad \text{和} \quad y = 2j - y' = \frac{j(2j - b - c)}{j - bc\overline{j}}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} y - x &= j \cdot \frac{(2j - b - c)(j + bc\overline{j}) - (2j - b - c + 2bc\overline{j})(j - bc\overline{j})}{(j - bc\overline{j})(j + bc\overline{j})} \\ &= j \cdot \frac{2bc\overline{j}(2j - b - c) - 2bc\overline{j}(j - bc\overline{j})}{(j - bc\overline{j})(j + bc\overline{j})} \\ &= j \cdot \frac{2bc\overline{j}(j - b - c + bc\overline{j})}{(j - bc\overline{j})(j + bc\overline{j})} \\ X &= \frac{y - x}{x} = \frac{2bc\overline{j}(j - b - c + bc\overline{j})}{(j - bc\overline{j})(2j - b - c + 2bc\overline{j})} \\ A &= \frac{y - a}{a} = \frac{j(2j - b - c - a) + abc\overline{j}}{a(j - bc\overline{j})} \end{aligned}$$

我們需證 $X/A = \overline{X/A}$ 。將設 $a = x^2, b = y^2, c = z^2, j = -(xy + yz + zx), \overline{j} = -\frac{x+y+z}{xyz}$ （跟以前的 x, y 無關）。根據上述改寫成

$$\begin{aligned} X &= \frac{2\frac{yz}{x}(x + y + z)(\frac{yz}{x}(x + y + z) + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)}{(-\frac{yz}{x}(x + y + z) + xy + yz + zx)(y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) + 2\frac{yz}{x}(x + y + z))} \\ &= \frac{2yz(x + y + z)(2xyz + \sum_{\text{sym}} x^2y)}{(y + z)(x^2 - yz)(x(y + z)(2x + y + z) + 2yz(x + y + z))} \\ &= \frac{2yz(x + y + z)(x + y)(x + z)}{(x^2 - yz)((x^2 + yz)(y + z) + (xy + yz + zx)(x + y + z))} \end{aligned}$$

並

$$\begin{aligned} A &= \frac{(xy + yz + zx)(x + y + z)^2 - xyz(x + y + z)}{x^2(- (xy + yz + zx) + \frac{yz}{x}(x + y + z))} \\ &= \frac{(x + y + z)(x + y)(y + z)(z + x)}{x(yz - x^2)(y + z)} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} X/A &= \frac{-2xyz}{(x^2 + yz)(y + z) + (x + y + z)(xy + yz + zx)} \\ &= \frac{-\frac{2}{xyz}}{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{yz}\right)\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)} \\ &= \overline{X/A} \end{aligned}$$

得證。 □

6 練習題

1. 令 $ABCD$ 為圓內接的四邊形。令 H_A, H_B, H_C, H_D 分別為三角形 BCD, CDA, DAB, ABC 的垂心。試證 $\overline{AH_A}, \overline{BH_B}, \overline{CH_C}, \overline{DH_D}$ 共點。
2. (China TST 2011) 令 Γ 為三角形 ABC 的外接圓。假設 $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ 為 Γ 的直徑。設 P 為 ABC 內的莫一點，並設 D, E, F 分別為 P 對 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的垂足。令 X 為 A' 對 D 的對稱點；類似定義 Y 和 Z 。試證 $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$ 。
3. 令 $ABCD$ 為四邊形，且 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ 對莫個圓 ω 相切。試證： \overline{AC} 的中點， \overline{BD} 的中點，與 ω 的圓心共線。
4. (Simson 線) 令 ABC 為三角形並 P 為 ABC 的外接圓上的莫一點。
 - (a) 令 D, E, F 為 P 對 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的垂足。試證 D, E, F 共線。
 - (b) 令 H 為 ABC 的垂心。試證 \overline{EF} 通過 \overline{PH} 的中點。
5. (Princeton) 令 γ 和 I 分別為三角形 ABC 的內心和內接圓。設 D, E, F 分別為 γ 對 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的切點，並設 D' 為 D 對 I 的對稱點。假設直線 EF 分別為 γ 對 D 與 D' 的切線交於點 P 與 Q 。試證 $\angle DAD' + \angle PIQ = 180^\circ$ 。
6. (Schiffler 點) 令 I 為 $\triangle ABC$ 的內心。試證： $\triangle AIB, \triangle BIC, \triangle CIA, \triangle ABC$ 的歐拉線 (Euler line) 共點。
7. (USA TST 2014) 令 $ABCD$ 為內接圓的四邊形，且設 E, F, G, H 分別為 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ 的中點。設 W, X, Y, Z 分別為 AHE, BEF, CFG, DGH 的垂心。試證： $ABCD$ 和 $WXYZ$ 的面積相等。
8. 令 O 為三角形 ABC 的外心。一條通過 O 的直線 l 分別於 \overline{AB} 與 \overline{AC} 交於點 X 與 Y 。令 M 和 N 分別為 BY 和 CX 的中點。試證 $\angle MON = \angle BAC$ 。
9. (APMO 2010) 令 ABC 是銳角三角形，滿足 $AB > BC$ 且 $AC > BC$ 。分別記 O 與 H 為三角形 ABC 的外心與垂心。設三角形 AHC 的外接圓交直線 AB 於異於 A 的一點 M ；且三角形 AHB 的外接圓交直線 AC 於異於 A 的一點 N 。證明三角形 MNH 的外接圓圓心在直線 OH 上。
10. (Iran 2013) 令 ABC 是銳角三角形，並設 M 為劣弧 \widehat{BC} 的中點。取 N 在 ABC 的外接圓上，使得 $\overline{AN} \perp \overline{BC}$ ，在分別取 K, L 在邊 AB 和 AC 上使得 $\overline{OK} \parallel \overline{MB}$ ， $\overline{OL} \parallel \overline{MC}$ ，此處 O 為 ABC 的外心。試證 $NK = NL$ 。
11. (MOP 2006) 令 $ABCD$ 為圓內接的四邊形，並設 O 為 $ABCD$ 的外心。設 P 為平面上的莫一點，且設 O_1, O_2, O_3, O_4 分別為三角形 PAB, PBC, PCD, PDA 的外心。試證： $\overline{O_1O_3}, \overline{O_2O_4}, \overline{OP}$ 的中點共線。