Olympiad Inequalities
數學奧林匹克的不等式

Evan Chen《陳誼廷》

30 April 2014

The goal of this document is to provide a easier introduction to olympiad inequalities than the standard exposition *Olympiad Inequalities*, by Thomas Mildorf. I was motivated to write it by feeling guilty for getting free 7's on problems by simply regurgitating a few tricks I happened to know, while other students were unable to solve the problem.

首先一些定義：我們會用到循環總和 $\sum_{\text{cyc}}$ (cyclic sum) 和對稱總和 $\sum_{\text{sym}}$ (symmetric sum). 舉個例，有三個變數的時候，

$$\sum_{\text{cyc}} a^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$\sum_{\text{cyc}} a^2 b = a^2 b + b^2 c + c^2 a$$
$$\sum_{\text{sym}} a^2 = a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2$$
$$\sum_{\text{sym}} a^2 b = a^2 b + a^2 c + b^2 c + b^2 a + c^2 a + c^2 b.$$

§1 多項式的不等式

§1.1 平均不等式和 Muirhead 不等式

考慮以下的定理。

定理 1 (平均不等式 / AM-GM)**.** 令 a_1, a_2, ..., a_n 為正實數。則

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

等號成立的充要條件為 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。

舉例子，由此可證

$$a^2 + b^2 \ge 2ab, \quad a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc.$$

把這種不等式加起來，就可得一些基本的命題。舉個例，

例子 2. 試證 $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ 和 $a^4 + b^4 + c^4 \ge a^2 bc + b^2 ca + c^2 ab$.

【證】利用 AM-GM 可得

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab \text{ 和 } \frac{2a^4+b^4+c^4}{4} \geq a^2bc.$$

類似有

$$\frac{b^2+c^2}{2} \geq bc \text{ 和 } \frac{2b^4+c^4+a^4}{4} \geq b^2ca.$$
$$\frac{c^2+a^2}{2} \geq ca \text{ 和 } \frac{2c^4+a^4+b^4}{4} \geq c^2ab.$$

上述加起來就得

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \text{ 和 } a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc+b^2ca+c^2ab. \qquad \square$$

練習題 3. 試證 $a^3+b^3+c^3 \geq a^2b+b^2c+c^2a$.

練習題 4. 試證 $a^5+b^5+c^5 \geq a^3bc+b^3ca+c^3ab \geq abc(ab+bc+ca)$.

最主要是要看得出來一個多項式大概多大，例如 $a^3+b^3+c^3$ 是最大的，abc 是最小的。大概來講，比較 “mixed” 的多項式是比較小的。由此，可明顯看出來 e.g.

$$(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc$$

因為兩邊把 $a^3+b^3+c^3$ 消掉以後，右邊只剩下 $24abc$，所以用 AM-GM 就解決了。

一個好用的定理是 Muirhead 定理。如果給定兩個數列 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ 和 $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$，使得

$$x_1+x_2+\cdots+x_n = y_1+y_2+\cdots+y_n,$$

且對於每個 $k=1,2,\ldots,n-1$ 有

$$x_1+x_2+\cdots+x_k \geq y_1+y_2+\cdots+y_k,$$

我們就說 (x_n) 蓋 (majorizes) (y_n)，寫 $(x_n) \succ (y_n)$。

根據上述，我們就有

定理 5 (Muirhead 不等式)**.** 如果 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 為正實數，且 (x_n) 蓋 (y_n)，以下的不等式成為：

$$\sum_{sym} a_1^{x_1}a_2^{x_2}\ldots a_n^{x_n} \geq \sum_{sym} a_1^{y_1}a_2^{y_2}\ldots a_n^{y_n}.$$

例子 6. 因為 $(5,0,0) \succ (3,1,1) \succ (2,2,1)$，故

$$\begin{aligned} a^5+a^5+b^5+b^5+c^5+c^5 &\geq a^3bc+a^3bc+b^3ca+b^3ca+c^3ab+c^3ab \\ &\geq a^2b^2c+a^2b^2c+b^2c^2a+b^2c^2a+c^2a^2b+c^2a^2b. \end{aligned}$$

由此可得 $a^5+b^5+c^5 \geq a^3bc+b^3ca+c^3ab \geq abc(ab+bc+ca)$.

注意 Muirhead 是對稱的，不是循環的。舉個例，雖然 $(3,0,0) \succ (2,1,0)$；但是用 Muirhead 可得出

$$2(a^3+b^3+c^3) \geq a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b$$

所以不可用來證明 $a^3+b^3+c^3 \geq a^2b+b^2c+c^2a$。這時還是要用 AM-GM 來解決。

§1.2 不齊次的不等式

考慮以下的題目。

例子 7. 如果 $abc=1$, 試證 $a^2+b^2+c^2 \geq a+b+c$.

【**證**】平均不等式兩邊的次數都一樣，所以光用 AM-GM 不夠；左邊的次數為二，但是右邊的次數為一。利用 $abc=1$，原不等式可改寫成

$$a^2+b^2+c^2 \geq a^{1/3}b^{1/3}c^{1/3}(a+b+c).$$

因為不等式現在是齊次，如果我們把 a, b, c 都乘上一個 $k>0$，等價不等式兩邊乘上 k^2, 不影響到原來的不等式。所以這時候就不必要再用到 $abc=1$ 的條件。因為 $(2,0,0) \succ (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$，利用 Muirhead 就完成了。 □

這個方法的重點是可以把題目的條件取掉；這很重要。(這個方法也可以反過來用：如果一個不等式是齊次，我們也可加一個（不齊次的）條件。)

§1.3 練習題

1. $a^7+b^7+c^7 \geq a^4b^3+b^4c^3+c^4a^3$.
2. 若 $a+b+c=1$, 則 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq 3+2\cdot\frac{(a^3+b^3+c^3)}{abc}$.
3. $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geq a+b+c$.
4. 若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, 則 $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 64$.
5. (USA 2011) 若 $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 \leq 4$, 則
$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3.$$
6. 若 $abcd=1$, 則 $a^4b+b^4c+c^4d+d^4a \geq a+b+c+d$.

§2 任意函數的不等式

令 $f:(u,v)\to\mathbb{R}$ 為函數，且設 $a_1,a_2,\ldots,a_n \in (u,v)$。假設我們固定 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ (如果不等式是齊次的，我們常會自己加這個條件)，而想證

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)$$

大於（或小於）$nf(a)$。以下有三個方法。

我們定義一個函數 f 是凸函數如果對於任意 x 有 $f''(x) \geq 0$；若每個 x 有 $f''(x) \leq 0$ 我們就定義 f 是凹函數。注意如果 f 為凸函數，$-f$ 就為凹函數。

§2.1 Jensen / Karamata

定理 8 (Jensen 不等式)**.** 如果 f 為凸函數，則

$$\frac{f(a_1)+\cdots+f(a_n)}{n} \geq f\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right).$$

若 f 為凹函數，不等式相反。

定理 9 (Karamata 不等式)**.** 如果 f 為凸函數，且 (x_n) 蓋 (y_n)，則

$$f(x_1)+\cdots+f(x_n)\ge f(y_1)+\cdots+f(y_n).$$

若 f 為凹函數，不等式相反。

例子 10 (Shortlist 2009)**.** 若 $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$，試證

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\le\frac{3}{16}.$$

【證】先把條件用掉：原題等價與

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\le\frac{3}{16}\cdot\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{a+b+c}.$$

現在不等式是齊次了，所以可不方假設 $a+b+c=3$。不等式就改變寫成

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{16a}-\frac{1}{(a+3)^2}\ge 0.$$

若設 $f(x)=\frac{1}{16x}-\frac{1}{(x+3)^2}$，可證 f 再 $(0,3)$ 上是凸函數，故用 Jensen 就解完了。 $\square$

例子 11. 試證

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{9}{a+b+c}.$$

【證】原題等價與

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{1}{\frac{a+b}{2}}+\frac{1}{\frac{b+c}{2}}+\frac{1}{\frac{c+a}{2}}\ge\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}+\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}+\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}.$$

不方假設 $a\ge b\ge c$。設 $f(x)=1/x$。因為

$$(a,b,c)\succ\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)\succ\left(\frac{a+b+c}{3},\frac{a+b+c}{3},\frac{a+b+c}{3}\right)$$

利用 Karamata 就解決了，齊次 $f(x)=\frac{1}{x}$。 $\square$

例子 12 (APMO 1996)**.** 若 a, b, c, 是三角形的邊，試證

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

【證】不方假設 $a\ge b\ge c$，再考慮 $(a+b-c,c+a-b,b+c-a)\succ(a,b,c)$，再利用 Karamata 再 $f(x)=\sqrt{x}$。 $\square$

§2.2 Tangent Line Trick

一樣固定 $a=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$。如果 f 不是凸函數，有時後還是可以證

$$f(x)\ge f(a)+f'(a)\left(x-a\right).$$

如果可證上述，也就可以令。這個方法叫 tangent line trick。

例子 13 (David Stoner)**.** 若 $a+b+c=3$，試證

$$18\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{(3-c)(4-c)}+2(ab+bc+ca)\geq 15.$$

【證】我們可把原題改變寫成

$$\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{18}{(3-c)(4-c)}-c^2\right)\geq 6.$$

因為

$$\frac{18}{(3-c)(4-c)}-c^2\geq\frac{c+3}{2}\iff c(c-1)^2(2c-9)\leq 0$$

所以加起來就解決了。 □

例子 14 (Japan)**.** 試證 $\sum_{\text{cyc}}\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}\geq\frac{3}{5}$。

【證】原題是齊次，所以可不方假設 $a+b+c=3$。所以我們要證明的是

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{(3-2a)^2}{a^2+(3-a)^2}\geq\frac{3}{5}.$$

利用 tangent line method 可以找出

$$\frac{(3-2a)^2}{(3-a)^2+a^2}\geq\frac{1}{5}-\frac{18}{25}(a-1)\iff\frac{18}{25}(a-1)^2\frac{2a+1}{2a^2-6a+9}\geq 0.$$ □

§2.3 $n-1$ EV

最後以個方法是 $n-1$ EV。這算是一個暴力的方法，可是很有用。

定理 15 ($n-1$ EV)**.** 令 a_1, a_2, ..., a_n 為實數，且固定 $a_1+a_2+\cdots+a_n$。令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 為一個函數使得 f 有正好一個拐點。若

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)$$

達到最大值或最小值，則 a_i 內有 $n-1$ 個變數相等。

【證】*Olympiad Inequalities*, by Thomas Mildorf, page 15. 證明的想法是利用 Karamata 不等式，把 a_i “推” 在一起。 □

例子 16 (IMO 2001 / APMOC 2014)**.** 令 a, b, c 為正實數，試證 $1\leq\sum_{\text{cyc}}\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}<2$。

【證】設 $e^x=\frac{bc}{a^2}$，$e^y=\frac{ca}{b^2}$，$e^z=\frac{ab}{c^2}$。我們固定有 $x+y+z=0$，且想證

$$1\leq f(x)+f(y)+f(z)<2$$

此處 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+8e^x}}$。可算出

$$f''(x)=\frac{4e^x\left(4e^x-1\right)}{\left(8e^x+1\right)^{\frac{5}{2}}}$$

所以利用 $n-1$ EV，可不方假設 $x=y$。令 $t=e^x$，所以原題就變成

$$1\leq\frac{2}{\sqrt{1+8t}}+\frac{1}{\sqrt{1+8/t^2}}<2.$$

這只剩下一個變數，因此這可以用微積分直接解決。 □

例子 17 (Vietnam 1998)**.** 令 $x_1, x_2, ..., x_n$ 為正實數滿足 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1998+x_i} = \frac{1}{1998}$。試證

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}{n-1} \geq 1998.$$

【證】定義 $y_i = \frac{1998}{1998+x_i}$，因此 $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$，而我們要真的是

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{y_i} - 1 \right) \geq (n-1)^n .$$

令 $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$，所以原題變成 $f(y_1) + \cdots + f(y_n) \geq nf\left(\frac{1}{n}\right)$。我們可算

$$f''(y) = \frac{1-2y}{(y^2-y)^2}.$$

因此 f 只有一個拐點，所以我們能不方假設 $y_1 = y_2 = \cdots = y_{n-1}$。令此為 t，我們只要證

$$(n-1)\ln\left(\frac{1}{t} - 1\right) + \ln\left(\frac{1}{1-(n-1)t} - 1\right) \geq n\ln(n-1).$$

這也可以直接用微積分。 □

§2.4 練習題

1. 利用 Jensen 證明 AM-GM。
2. 若 $a^2+b^2+c^2=1$, 試證 $\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2} \leq \frac{1}{6ab+c^2} + \frac{1}{6bc+a^2} + \frac{1}{6ca+b^2}$。
3. 若 $a+b+c=3$, 試證
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{2a^2+a+1} \leq \frac{3}{4}.$$
4. (MOP 2012) 若 $a+b+c+d=4$, 試證 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \geq a^2+b^2+c^2+d^2$。

§3 消除分母和根號

§3.1 Weighted Power Mean

AM-GM 可以根據以下 generalize。

定理 18 (Weighted Power Mean)**.** 令 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 為正實數，且 $w_1, w_2, ..., w_n$ 為正實數，滿足 $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$。對於每個實數 r，定義

$$\mathcal{P}(r) = \begin{cases} (w_1 a_1^r + w_2 a_2^r + \cdots + w_n a_n^r)^{1/r} & r \neq 0 \\ a_1^{w_1} a_2^{w_2} \dots a_n^{w_n} & r = 0. \end{cases}$$

若 $r > s$, 則 $\mathcal{P}(r) \geq \mathcal{P}(s)$；等號成立的充要條件是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。

特別是，若 $w_1 = w_2 = \cdots = w_n = \frac{1}{n}$，以上的 $\mathcal{P}(r)$ 等價與

$$\mathcal{P}(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n} \right)^{1/r} & r \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} & r = 0. \end{cases}$$

如果我們再設 $r = 2, 1, 0, -1$ 就得到

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \ge \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

剛好就是 QM-AM-GM-HM。這可以當一個方法來“加”根號，例如

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \le 3\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}.$$

例子 19 (獨立研究)**.** 試證 $3(a+b+c) \ge 8\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$.

【**證**】利用 Power Mean 與 $r = 1$, $s = \frac{1}{3}$, $w_1 = \frac{1}{9}$, $w_2 = \frac{8}{9}$, 可得

$$\left(\frac{1}{9}\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}} + \frac{8}{9}\sqrt[3]{abc}\right)^3 \le \frac{1}{9}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right) + \frac{8}{9}(abc).$$

所以只需要證 $a^3 + b^3 + c^3 + 24abc \le (a+b+c)^3$，明顯。 □

§3.2 Cauchy 和 Hölder

定理 20 (Hölder 不等式)**.** 令 λ_a, λ_b, ..., λ_z 為正實數，滿足 $\lambda_a + \lambda_b + \cdots + \lambda_z = 1$。設 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$, ..., $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 為正實數。則

$$(a_1 + \cdots + a_n)^{\lambda_a} (b_1 + \cdots + b_n)^{\lambda_b} \ldots (z_1 + \cdots + z_n)^{\lambda_z} \ge \sum_{i=1}^{n} a_i^{\lambda_a} b_i^{\lambda_b} \ldots z_i^{\lambda_z}.$$

等號成立的充要條件是 $a_1 : a_2 : \cdots : a_n \equiv b_1 : b_2 : \cdots : b_n \equiv \cdots \equiv z_1 : z_2 : \cdots : z_n$.

【**證**】不方假設 $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n = \cdots = 1$（注意 a_i 的次數兩邊都為 λ_a）。則原不等式的左邊為 1, 且利用 Weighted AM-GM 可得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\lambda_a} b_i^{\lambda_b} \ldots z_i^{\lambda_z} \le \sum_{i=1}^{n} (\lambda_a a_i + \lambda_b b_i + \ldots) = 1.$$ □

如果我們設 $\lambda_a = \lambda_b = \frac{1}{2}$，這就成為 Cauchy 的不等式：

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \ge \left(\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \cdots + \sqrt{a_n b_n}\right)^2.$$

Cauchy 可以改寫成

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \ge \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + \cdots + y_n}.$$

在美國，上述也叫做 Titu's Lemma。

Cauchy 和 Hölder 不等式有（至少）兩個用法：

1. 把根號消除
2. 把分母消除

我們看一下幾個例子。

例子 21 (IMO 2001)**.** 試證

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq 1.$$

【**證**】利用 Hölder 可得

$$\left(\sum_{\text{cyc}} a(a^2+8bc)\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^{\frac{2}{3}} \geq (a+b+c)$$

所以只要證 $(a+b+c)^3 \geq \sum_{\text{cyc}} a(a^2+8bc) = a^3+b^3+c^3+24abc$。看過嗎？ □

我們這一題是用 Hölder 把根號取消。

例子 22 (Balkan)**.** 試證 $\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(c+a)} + \frac{1}{c(a+b)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$.

【**證**】一樣用 Hölder：

$$\left(\sum_{\text{cyc}} a\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{\text{cyc}} b+c\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a(b+c)}\right)^{\frac{1}{3}} \geq 1+1+1=3.$$ □

例子 23 (USA 2012)**.** 試證 $\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3+5b^3}{3a+b} \geq \frac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

【**證**】我們用 Cauchy (Titu) 可得

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{3a+b} = \sum_{\text{cyc}} \frac{(a^2)^2}{3a^2+ab} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum_{\text{cyc}} 3a^2+ab}.$$

我們可證明這個大於等於 $\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$（記得 $a^2+b^2+c^2$ 是很“大”；用這個注意可以看出來這個方法一定可以用）。類似可證 $\sum_{\text{cyc}} \frac{5b^3}{3a+b} \geq \frac{5}{4}(a^2+b^2+c^2)$。 □

例子 24 (USA TST 2010)**.** 若 $abc=1$, 試證 $\frac{1}{a^5(b+2c)^2} + \frac{1}{b^5(c+2a)^2} + \frac{1}{c^5(a+2b)^2} \geq \frac{1}{3}$。

【**證**】我們可以用 Hölder 把分母的平方消掉：

$$\left(\sum_{\text{cyc}} ab+2ac\right)^2 \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^5(b+2c)^2}\right) \geq \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a}\right)^3 \geq 3(ab+bc+ca)^2.$$ □

§3.3 練習題

1. 若 $a+b+c=1$, 則 $\sqrt{ab+c}+\sqrt{bc+a}+\sqrt{ca+b} \geq 1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.
2. 若 $a^2+b^2+c^2=12$, 試證 $a \cdot \sqrt[3]{b^2+c^2}+b \cdot \sqrt[3]{c^2+a^2}+c \cdot \sqrt[3]{a^2+b^2} \leq 12$.
3. (ISL 2004) 若 $ab+bc+ca=1$，試證 $\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a} \leq \frac{1}{abc}$。
4. (MOP 2011) $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}+9\sqrt[3]{abc} \leq 4(a+b+c)$.
5. (陳誼廷) 若 $a^3+b^3+c^3+abc=4$, 試證

   $$\frac{(5a^2+bc)^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{(5b^2+ca)^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{(5c^2+ab)^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{(10-abc)^2}{a+b+c}.$$

   等號什麼時候成立？

§4 Problems

1. (MOP 2013) 若 $a+b+c=3$, 試證
$$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}\geq\sqrt{3}.$$
2. (IMO 1995) 若 $abc=1$，試證 $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$.
3. (USA 2003) 試證 $\sum_{\text{cyc}}\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}\leq 8$。
4. (Romania) 令 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 為正實數，$x_1x_2\ldots x_n=1$。試證 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1+x_i}\leq 1$。
5. (USA 2004) 令 a, b, c 為正實數。試證
$$\left(a^5-a^2+3\right)\left(b^5-b^2+3\right)\left(c^5-c^2+3\right)\geq(a+b+c)^3.$$
6. (陳誼廷) 令 a, b, c 為正實數滿足 $a+b+c=\sqrt[7]{a}+\sqrt[7]{b}+\sqrt[7]{c}$。試證 $a^ab^bc^c\geq 1$。