

# Olympiad Inequalities

## 數學奧林匹克的不等式

EVAN CHEN  
陳誼廷

April 30, 2014

The goal of this document is to provide a easier introduction to olympiad inequalities than the standard exposition *Olympiad Inequalities*, by Thomas Mildorf. I was motivated to write it by feeling guilty for getting free 7's on problems by simply regurgitating a few tricks I happened to know, while other students were unable to solve the problem.

首先一些定義：我們會用到循環總和  $\sum_{\text{cyc}}$  (cyclic sum) 和對稱總和  $\sum_{\text{sym}}$  (symmetric sum). 舉個例，有三個變數的時候，

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}} a^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ \sum_{\text{cyc}} a^2b &= a^2b + b^2c + c^2a \\ \sum_{\text{sym}} a^2 &= a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 \\ \sum_{\text{sym}} a^2b &= a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b.\end{aligned}$$

## 1 多項式的不等式

### 1.1 平均不等式和 Muirhead 不等式

考慮以下的定理。

**定理 1** (平均不等式 / AM-GM). 令  $a_1, a_2, \dots, a_n$  為正實數。則

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

等號成立的充要條件為  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 。

舉例子，由此可證

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

把這種不等式加起來，就可得一些基本的命題。舉個例，

**例子 2.** 試證  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$  和  $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$ .

【證】 利用 AM-GM 可得

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab \text{ 和 } \frac{2a^4 + b^4 + c^4}{4} \geq a^2bc.$$

類似有

$$\frac{b^2 + c^2}{2} \geq bc \text{ 和 } \frac{2b^4 + c^4 + a^4}{4} \geq b^2ca.$$

$$\frac{c^2 + a^2}{2} \geq ca \text{ 和 } \frac{2c^4 + a^4 + b^4}{4} \geq c^2ab.$$

上述加起來就得

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \text{ 和 } a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab. \quad \square$$

**練習題 3.** 試證  $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$ .

**練習題 4.** 試證  $a^5 + b^5 + c^5 \geq a^3bc + b^3ca + c^3ab \geq abc(ab + bc + ca)$ .

最主要是要看得出來一個多項式大概多大，例如  $a^3 + b^3 + c^3$  是最大的， $abc$  是最小的。大概來講，比較“mixed”的多項式是比較小的。由此，可明顯看出來 e.g.

$$(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$$

因為兩邊把  $a^3 + b^3 + c^3$  消掉以後，右邊只剩下  $24abc$ ，所以用 AM-GM 就解決了。

一個好用的定理是 Muirhead 定理。如果給定兩個數列  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  和  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ ，使得

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n,$$

且對於每個  $k = 1, 2, \dots, n-1$  有

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq y_1 + y_2 + \dots + y_k,$$

我們就說  $(x_n)$  蓋 (majorizes)  $(y_n)$ ，寫  $(x_n) \succ (y_n)$ 。

根據上述，我們就有

**定理 5** (Muirhead 不等式). 如果  $a_1, a_2, \dots, a_n$  為正實數，且  $(x_n)$  蓋  $(y_n)$ ，以下的不等式成為：

$$\sum_{sym} a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_n^{x_n} \geq \sum_{sym} a_1^{y_1} a_2^{y_2} \dots a_n^{y_n}.$$

**例子 6.** 因為  $(5, 0, 0) \succ (3, 1, 1) \succ (2, 2, 1)$ ，故

$$\begin{aligned} a^5 + a^5 + b^5 + b^5 + c^5 + c^5 &\geq a^3bc + a^3bc + b^3ca + b^3ca + c^3ab + c^3ab \\ &\geq a^2b^2c + a^2b^2c + b^2c^2a + b^2c^2a + c^2a^2b + c^2a^2b. \end{aligned}$$

由此可得  $a^5 + b^5 + c^5 \geq a^3bc + b^3ca + c^3ab \geq abc(ab + bc + ca)$ .

注意 Muirhead 是對稱的，不是循環的。舉個例，雖然  $(3, 0, 0) \succ (2, 1, 0)$ ；但是用 Muirhead 可得出

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b$$

所以不可用來證明  $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$ 。這時還是要用 AM-GM 來解決。

## 1.2 不齊次的不等式

考慮以下的題目。

**例子 7.** 如果  $abc = 1$ , 試證  $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$ .

**【證】** 平均不等式兩邊的次數都一樣，所以光用 AM-GM 不夠；左邊的次數為二，但是右邊的次數為一。利用  $abc = 1$ ，原不等式可改寫成

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a^{1/3}b^{1/3}c^{1/3}(a + b + c).$$

因為不等式現在是齊次，如果我們把  $a, b, c$  都乘上一個  $k > 0$ ，等價不等式兩邊乘上  $k^2$ ，不影響到原來的不等式。所以這時候就不必要再用到  $abc = 1$  的條件。因為  $(2, 0, 0) \succ (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ，利用 Muirhead 就完成了。□

這個方法的重點是可以把題目的條件去掉；這很重要。（這個方法也可以反過來用：如果一個不等式是齊次，我們也可加一個（不齊次的）條件。）

## 1.3 練習題

- $a^7 + b^7 + c^7 \geq a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3$ .
- 若  $a + b + c = 1$ , 則  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 + 2 \cdot \frac{(a^3 + b^3 + c^3)}{abc}$ .
- $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$ .
- 若  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ , 則  $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 64$ .
- (USA 2011) 若  $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4$ , 則

$$\frac{ab + 1}{(a + b)^2} + \frac{bc + 1}{(b + c)^2} + \frac{ca + 1}{(c + a)^2} \geq 3.$$

- 若  $abcd = 1$ , 則  $a^4b + b^4c + c^4d + d^4a \geq a + b + c + d$ .

## 2 任意函數的不等式

令  $f : (u, v) \rightarrow \mathbb{R}$  為函數，且設  $a_1, a_2, \dots, a_n \in (u, v)$ 。假設我們固定  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$ （如果不等式是齊次的，我們常會自己加這個條件），而想證

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)$$

大於（或小於） $nf(a)$ 。以下有三個方法。

我們定義一個函數  $f$  是凸函數如果對於任意  $x$  有  $f''(x) \geq 0$ ；若每個  $x$  有  $f''(x) \leq 0$  我們就定義  $f$  是凹函數。注意如果  $f$  為凸函數， $-f$  就為凹函數。

### 2.1 Jensen / Karamata

**定理 8** (Jensen 不等式). 如果  $f$  為凸函數，則

$$\frac{f(a_1) + \dots + f(a_n)}{n} \geq f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right).$$

若  $f$  為凹函數，不等式相反。

**定理 9** (Karamata 不等式). 如果  $f$  為凸函數, 且  $(x_n)$  蓋  $(y_n)$ , 則

$$f(x_1) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + \cdots + f(y_n).$$

若  $f$  為凹函數, 不等式相反。

**例子 10** (Shortlist 2009). 若  $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ , 試證

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(a+2b+c)^2} + \frac{1}{(a+b+2c)^2} \leq \frac{3}{16}.$$

**【證】** 先把條件用掉：原題等價與

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(a+2b+c)^2} + \frac{1}{(a+b+2c)^2} \leq \frac{3}{16} \cdot \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{a+b+c}.$$

現在不等式是齊次了, 所以可不方假設  $a + b + c = 3$ 。不等式就改變寫成

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{16a} - \frac{1}{(a+3)^2} \geq 0.$$

若設  $f(x) = \frac{1}{16x} - \frac{1}{(x+3)^2}$ , 可證  $f$  再  $(0, 3)$  上是凸函數, 故用 Jensen 就解完了。  $\square$

**例子 11.** 試證

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2 \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

**【證】** 原題等價與

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\frac{a+b}{2}} + \frac{1}{\frac{b+c}{2}} + \frac{1}{\frac{c+a}{2}} \geq \frac{1}{\frac{a+b+c}{3}} + \frac{1}{\frac{a+b+c}{3}} + \frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}.$$

不方假設  $a \geq b \geq c$ 。設  $f(x) = 1/x$ 。因為

$$(a, b, c) \succ \left( \frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2} \right) \succ \left( \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3} \right)$$

利用 Karamata 就解決了, 齊次  $f(x) = \frac{1}{x}$ 。  $\square$

**例子 12** (APMO 1996). 若  $a, b, c$ , 是三角形的邊, 試證

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

**【證】** 不方假設  $a \geq b \geq c$ , 再考慮  $(a+b-c, c+a-b, b+c-a) \succ (a, b, c)$ , 再利用 Karamata 再  $f(x) = \sqrt{x}$ 。  $\square$

## 2.2 Tangent Line Trick

一樣固定  $a = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ 。如果  $f$  不是凸函數, 有時後還是可以證

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

如果可證上述, 也就可以令。這個方法叫 tangent line trick。

**例子 13** (David Stoner). 若  $a + b + c = 3$ , 試證

$$18 \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(3-c)(4-c)} + 2(ab + bc + ca) \geq 15.$$

**【證】** 我們可把原題改變寫成

$$\sum_{\text{cyc}} \left( \frac{18}{(3-c)(4-c)} - c^2 \right) \geq 6.$$

因為

$$\frac{18}{(3-c)(4-c)} - c^2 \geq \frac{c+3}{2} \iff c(c-1)^2(2c-9) \leq 0$$

所以加起來就解決了。  $\square$

**例子 14** (Japan). 試證  $\sum_{\text{cyc}} \frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} \geq \frac{3}{5}$ 。

**【證】** 原題是齊次，所以可不方假設  $a + b + c = 3$ 。所以我們要證明的是

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(3-2a)^2}{a^2+(3-a)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

利用 tangent line method 可以找出

$$\frac{(3-2a)^2}{(3-a)^2+a^2} \geq \frac{1}{5} - \frac{18}{25}(a-1) \iff \frac{18}{25}(a-1)^2 \frac{2a+1}{2a^2-6a+9} \geq 0. \quad \square$$

### 2.3 $n-1$ EV

最後以個方法是  $n-1$  EV。這算是一個暴力的方法，可是很有用。

**定理 15** ( $n-1$  EV). 令  $a_1, a_2, \dots, a_n$  為實數，且固定  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。令  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  為一個函數使得  $f$  有正好一個拐點。若

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)$$

達到最大值或最小值，則  $a_i$  內有  $n-1$  個變數相等。

**【證】** *Olympiad Inequalities*, by Thomas Mildorf, page 15. 證明的想法是利用 Karamata 不等式，把  $a_i$  “推”在一起。  $\square$

**例子 16** (IMO 2001 / APMOC 2014). 令  $a, b, c$  為正實數，試證  $1 \leq \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} < 2$ 。

**【證】** 設  $e^x = \frac{bc}{a^2}$ ,  $e^y = \frac{ca}{b^2}$ ,  $e^z = \frac{ab}{c^2}$ 。我們固定有  $x + y + z = 0$ ，且想證

$$1 \leq f(x) + f(y) + f(z) < 2$$

此處  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+8e^x}}$ 。可算出

$$f''(x) = \frac{4e^x(4e^x-1)}{(8e^x+1)^{\frac{5}{2}}}$$

所以利用  $n-1$  EV，可不方假設  $x = y$ 。令  $t = e^x$ ，所以原題就變成

$$1 \leq \frac{2}{\sqrt{1+8t}} + \frac{1}{\sqrt{1+8/t^2}} < 2.$$

這只剩下一個變數，因此這可以用微積分直接解決。  $\square$

例子 17 (Vietnam 1998). 令  $x_1, x_2, \dots, x_n$  為正實數滿足  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1998+x_i} = \frac{1}{1998}$ 。試證

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}{n-1} \geq 1998.$$

【證】 定義  $y_i = \frac{1998}{1998+x_i}$ ，因此  $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$ ，而我們要真的是

$$\prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{y_i} - 1 \right) \geq (n-1)^n.$$

令  $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ ，所以原題變成  $f(y_1) + \dots + f(y_n) \geq n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 。我們可算

$$f''(y) = \frac{1-2y}{(y^2-y)^2}.$$

因此  $f$  只有一個拐點，所以我們能不方假設  $y_1 = y_2 = \dots = y_{n-1}$ 。令此為  $t$ ，我們只要證

$$(n-1) \ln\left(\frac{1}{t} - 1\right) + \ln\left(\frac{1}{1-(n-1)t} - 1\right) \geq n \ln(n-1).$$

這也可以直接用微積分。 □

## 2.4 練習題

1. 利用 Jensen 證明 AM-GM。
2. 若  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ，試證  $\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2} \leq \frac{1}{6ab+c^2} + \frac{1}{6bc+a^2} + \frac{1}{6ca+b^2}$ 。
3. 若  $a + b + c = 3$ ，試證

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{2a^2 + a + 1} \leq \frac{3}{4}.$$

4. (MOP 2012) 若  $a + b + c + d = 4$ ，試證  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ 。

## 3 消除分母和根號

### 3.1 Weighted Power Mean

AM-GM 可以根據以下 generalize。

定理 18 (Weighted Power Mean). 令  $a_1, a_2, \dots, a_n$  為正實數，且  $w_1, w_2, \dots, w_n$  為正實數，滿足  $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$ 。對於每個實數  $r$ ，定義

$$\mathcal{P}(r) = \begin{cases} (w_1 a_1^r + w_2 a_2^r + \dots + w_n a_n^r)^{1/r} & r \neq 0 \\ a_1^{w_1} a_2^{w_2} \dots a_n^{w_n} & r = 0. \end{cases}$$

若  $r > s$ ，則  $\mathcal{P}(r) \geq \mathcal{P}(s)$ ；等號成立的充要條件是  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 。

特別是，若  $w_1 = w_2 = \dots = w_n = \frac{1}{n}$ ，以上的  $\mathcal{P}(r)$  等價與

$$\mathcal{P}(r) = \begin{cases} \left( \frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{1/r} & r \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} & r = 0. \end{cases}$$

如果我們再設  $r = 2, 1, 0, -1$  就得到

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

剛好就是 QM-AM-GM-HM。這可以當一個方法來“加”根號，例如

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq 3\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}.$$

**例子 19** (獨立研究). 試證  $3(a+b+c) \geq 8\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$ .

**【證】** 利用 Power Mean 與  $r = 1, s = \frac{1}{3}, w_1 = \frac{1}{9}, w_2 = \frac{8}{9}$ , 可得

$$\left( \frac{1}{9} \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}} + \frac{8}{9} \sqrt[3]{abc} \right)^3 \leq \frac{1}{9} \left( \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \right) + \frac{8}{9} (abc).$$

所以只需要證  $a^3 + b^3 + c^3 + 24abc \leq (a+b+c)^3$ , 明顯。  $\square$

### 3.2 Cauchy 和 Hölder

**定理 20** (Hölder 不等式). 令  $\lambda_a, \lambda_b, \dots, \lambda_z$  為正實數, 滿足  $\lambda_a + \lambda_b + \cdots + \lambda_z = 1$ 。設  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots, z_1, z_2, \dots, z_n$  為正實數。則

$$(a_1 + \cdots + a_n)^{\lambda_a} (b_1 + \cdots + b_n)^{\lambda_b} \cdots (z_1 + \cdots + z_n)^{\lambda_z} \geq \sum_{i=1}^n a_i^{\lambda_a} b_i^{\lambda_b} \cdots z_i^{\lambda_z}.$$

等號成立的充要條件是  $a_1 : a_2 : \cdots : a_n \equiv b_1 : b_2 : \cdots : b_n \equiv \cdots \equiv z_1 : z_2 : \cdots : z_n$ .

**【證】** 不妨假設  $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n = \cdots = 1$  (注意  $a_i$  的次數兩邊都為  $\lambda_a$ )。則原不等式的左邊為 1, 且利用 Weighted AM-GM 可得

$$\sum_{i=1}^n a_i^{\lambda_a} b_i^{\lambda_b} \cdots z_i^{\lambda_z} \leq \sum_{i=1}^n (\lambda_a a_i + \lambda_b b_i + \cdots) = 1. \quad \square$$

如果我們設  $\lambda_a = \lambda_b = \frac{1}{2}$ , 這就成為 Cauchy 的不等式:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \geq \left( \sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \cdots + \sqrt{a_n b_n} \right)^2.$$

Cauchy 可以改寫成

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + \cdots + y_n}.$$

在美國, 上述也叫做 Titu's Lemma。

Cauchy 和 Hölder 不等式有 (至少) 兩個用法:

1. 把根號消除
2. 把分母消除

我們看一下幾個例子。

例子 21 (IMO 2001). 試證

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq 1.$$

【證】 利用 Hölder 可得

$$\left( \sum_{\text{cyc}} a(a^2 + 8bc) \right)^{\frac{1}{3}} \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \right)^{\frac{2}{3}} \geq (a + b + c)$$

所以只要證  $(a + b + c)^3 \geq \sum_{\text{cyc}} a(a^2 + 8bc) = a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$ 。看過嗎？  $\square$

我們這一題是用 Hölder 把根號取消。

例子 22 (Balkan). 試證  $\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(c+a)} + \frac{1}{c(a+b)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$ 。

【證】 一樣用 Hölder：

$$\left( \sum_{\text{cyc}} a \right)^{\frac{1}{3}} \left( \sum_{\text{cyc}} b + c \right)^{\frac{1}{3}} \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a(b+c)} \right)^{\frac{1}{3}} \geq 1 + 1 + 1 = 3. \quad \square$$

例子 23 (USA 2012). 試證  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3 + 5b^3}{3a + b} \geq \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$ 。

【證】 我們用 Cauchy (Titu) 可得

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{3a + b} = \sum_{\text{cyc}} \frac{(a^2)^2}{3a^2 + ab} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\sum_{\text{cyc}} 3a^2 + ab}.$$

我們可證明這個大於等於  $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$  (記得  $a^2 + b^2 + c^2$  是很“大”；用這個注意可以看出來這個方法一定可以用)。類似可證  $\sum_{\text{cyc}} \frac{5b^3}{3a + b} \geq \frac{5}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ 。  $\square$

例子 24 (USA TST 2010). 若  $abc = 1$ , 試證  $\frac{1}{a^5(b+2c)^2} + \frac{1}{b^5(c+2a)^2} + \frac{1}{c^5(a+2b)^2} \geq \frac{1}{3}$ 。

【證】 我們可以用 Hölder 把分母的平方消掉：

$$\left( \sum_{\text{cyc}} ab + 2ac \right)^2 \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^5(b+2c)^2} \right) \geq \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a} \right)^3 \geq 3(ab + bc + ca)^2. \quad \square$$

### 3.3 練習題

1. 若  $a + b + c = 1$ , 則  $\sqrt{ab + c} + \sqrt{bc + a} + \sqrt{ca + b} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ .
2. 若  $a^2 + b^2 + c^2 = 12$ , 試證  $a \cdot \sqrt[3]{b^2 + c^2} + b \cdot \sqrt[3]{c^2 + a^2} + c \cdot \sqrt[3]{a^2 + b^2} \leq 12$ .
3. (ISL 2004) 若  $ab + bc + ca = 1$ , 試證  $\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}$ 。
4. (MOP 2011)  $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - ca + a^2} + 9\sqrt[3]{abc} \leq 4(a + b + c)$ .
5. (陳誼廷) 若  $a^3 + b^3 + c^3 + abc = 4$ , 試證

$$\frac{(5a^2 + bc)^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{(5b^2 + ca)^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{(5c^2 + ab)^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{(10 - abc)^2}{a + b + c}.$$

等號什麼時候成立？

## 4 Problems

1. (MOP 2013) 若  $a + b + c = 3$ , 試證

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \geq \sqrt{3}.$$

2. (IMO 1995) 若  $abc = 1$ , 試證  $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$ .

3. (USA 2003) 試證  $\sum_{\text{cyc}} \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} \leq 8$ .

4. (Romania) 令  $x_1, x_2, \dots, x_n$  為正實數,  $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ . 試證  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-1+x_i} \leq 1$ .

5. (USA 2004) 令  $a, b, c$  為正實數。試證

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3.$$

6. (陳誼廷) 令  $a, b, c$  為正實數滿足  $a + b + c = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ . 試證  $a^a b^b c^c \geq 1$ .