55^{th} IMO TST：第二階段選訓營

國立中央大學，台灣

獨立研究（一）　　8:30-10:20

二零一四年四月十二日

1. 令 n 為以正整數且令 $a_1, \ldots, a_{n-1}$ 為任意實數。定義數列 $u_0, \ldots, u_n$ 與 $v_0, \ldots, v_n$ 如下：

$$u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 1,$$
$$u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1},$$
$$v_{k+1} = v_k + a_{n-k} v_{k-1} \text{ 對於 } k = 1, \ldots, n-1.$$

試證： $u_n = v_n$.

2. 設 $ABCDEF$ 為凸六邊形，其中 $AB = DE$, $BC = EF$, $CD = FA$, 並且 $\angle A - \angle D = \angle C - \angle F = \angle E - \angle B$。 證明對角線 AD, BE 與 CF 共點。

55^{th} IMO TST：第二階段選訓營

國立中央大學，台灣

獨立研究（二）　　14:00-15:50

二零一四年四月十二日

1. 設 $\triangle ABC$ 的內心與外心分別為 I 與 O。 作直線 L 使與 BC 邊平形，並與 $\triangle ABC$ 的內切圓相切。設 L 與 IO 交於 X 點，另取 L 上的一點 Y 使得 YI 垂直於 IO。 證明 A, X, O, Y 四點共圓。

2. 設 r 為一正整數， 而 $a_0, a_1, \ldots,$ 為無窮多個實數所成的序列。 假設對與任意的非負整數 m 和 s, 都存在正整數 $n \in [m+1, m+r]$ 使得
$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m+s} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+s}.$$
試證：存在 $p \geq 1$, 使得對於所有非負整數 n, $a_{n+p} = a_n$。

55^{th} IMO TST：第二階段選訓營

國立中央大學，台灣

獨立研究（三）　　14:00-15:50

二零一四年四月十三日

1. 令 $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. 試證： 對任意正整數 k,

$$\left(a_1^k + \frac{1}{a_1^k}\right)\left(a_2^k + \frac{1}{a_2^k}\right)\left(a_n^k + \frac{1}{a_n^k}\right) \geq \left(n^k + \frac{1}{n^k}\right)^n.$$

2. 試求函數 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, 滿足

$$f\left(\frac{f(x)+a}{b}\right) = f\left(\frac{x+a}{b}\right)$$

對於所有 $x \in \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{Z}$ 和 $b \in \mathbb{N}$ 都成立。

55^{th} IMO TST：第二階段選訓營

國立中央大學，台灣

模擬競賽（一）　　8:30-13:00

二零一四年四月十四日

1. 設 ω 為三角形 ABC 的外接圓。 令 AB 邊的中點為 M, AC 邊的中點為 N, 並令 ω 上不含點的 BC 弧的中點為 T。 設三角形 AMT 的與 AC 中垂線交於 X 點， 三角形 ANT 的外接圓與 AB 邊的中垂線交於 Y 點；假設 X, Y 兩點皆位於三角形 ABC 的內部。 直線 MN 與 XY 交於 K 點。 證明 $KA = KT$。

2. 試求所有的函數 $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 滿足

$$f(f(f(n))) = f(n+1) + 1, \text{ 對所有的非負整數 } n \text{ 皆成立。}$$

3. 給定一個大於 1 的正整數 k。 甲、乙兩人玩以下的數字遊戲：在遊戲開始時，有一個正整數 $n \geq k$ 被寫在黑板上。接著，從甲開始，兩人輪流有進行以下動作：擦掉寫在黑板的數 m, 並在黑板上寫個與 m 互質的正整數 m' 且 $k \leq m' < m$。 第一個無法寫下數字的人輸。
對於在黑板上的數字 $n \geq k$，如果乙有必勝法，則稱 n 是個好數字； 反之， n 是個壞數字。現在， 假設 $n, n' \geq k$, 且質數 $p \leq k$ 整除 n 若且唯若 p 整除 n'。試證： n 和 n' 要不同時是好數字，要不同時是壞數字。

55^{th} IMO TST：第二階段選訓營

國立中央大學，台灣

模擬競賽（二）　　8:30-13:00

二零一四年四月十四日

4. 證明：在任意由相異的 2000 個實數所成之集合中，存在兩對實數 $a > b$ 與 $c > d$, 其中 $a \neq c$ 或 $b \neq d$， 使得

$$\left|\frac{a-b}{c-d} - 1\right| < \frac{1}{100000}.$$

5. 考慮一個簡單圖 G。我們有兩種動作：

   (1) 若 v 是 G 的頂角，而 v 的度是奇數，可以把 v 刪除。

   (2) 可把整個圖 G 改成 $G \times K_2$。

   試證：可以達到一個圖 H 使得 H 都沒有邊。

6. 設 P 為三角形 ABC 内一點，直線 AP, BP, CP 分別與三角形 ABC 的外接圓交於 T, S, R 點 ($T \neq A$, $S \neq B$, $R \neq C$)。 設 U 為線段 PT 内一點。過 U 與 AB 平行的直線分別與 CR 交於 W, 過 U 與 AC 平行的直線分別與 BS 交於 V 點。 最後，設過 B 與 CP 平行的直線，與過 C 與 BP 平行的交於 Q 點。 已知 RS 與 VW 平行， $\angle CAP = \angle BAQ$。