55^{th} IMO TST：第一階段選訓營

國立中央大學，台灣

獨立研究（一）　　19:10-21:00

二零一四年三月二十八日

1. 已知 a, b, c 為正數，試證不等式

$$3(a+b+c) \geq 8\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

2. 是否能找到十個集合 A_1, A_2, $\ldots$, A_{10} 同時滿足下列條件：
   - (i) 每個集合有三個元素 $\{a,b,c\}$, 其中 $a \in \{1,2,3\}$, $b \in \{4,5,6\}$, $c \in \{7,8,9\}$.
   - (ii) 任兩集合都不相等。
   - (iii) 將這十個集合依次一圈 (A_1, A_2, $\ldots$, A_{10}), 則任意相鄰的兩集合沒有共同元素，但是任意不相鄰的兩集合都有共同元素。(註. A_{10} 與 A_1 相鄰。)

55^{th} IMO TST：第一階段選訓營

國立中央大學，台灣

獨立研究（二）　　19:10-21:00

二零一四年三月二十九日

1. 試求所有的函數 $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ 滿足

$$f(2) = 7, \quad f(mn) = f(m) + f(n) + f(m)f(n), \text{ 對所有 } m, n \in \mathbb{N}_0.$$

2. 設一個三角形的三邊長分別為 a, b, c 而 a, b, c 三邊所對應的高分別為 h_a, h_b, h_c。證明 $\left(\frac{a}{h_a}\right)^2 + \left(\frac{b}{h_b}\right)^2 + \left(\frac{c}{h_c}\right)^2 \geq 4$.

55^{th} IMO TST：第一階段選訓營

國立中央大學，台灣

獨立研究（三）　　16:10-18:00

二零一四年三月三十日

1. 設圓 O_1, O_2 的半徑分別為 R_1, R_2, 且此兩圓交於 A, D 兩點。過 D 作一直線 L, 設 L 分別再交圓 O_1, O_2 與 B, C 兩點。 現在讓兩圓圓心的距離可以變動，直線 L 也可以變動。當 $\triangle ABC$ 的面積達到最大時，求 AD 的長度。

2. 令 n 為正整數。求最小的正整數 k, 使得：若 a_1, a_2, $\ldots$, a_d 滿足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_d = n$，且對於所有 $i = 1, 2, \ldots, d$, 都有 $0 \leq a_i \leq 1$, 則我們可以將這 d 個數分成 k 組（其中若干組可為空集合），使得每一組的數字總和至多為 1.

55^{th} IMO TST：第一階段選訓營

國立中央大學，台灣

模擬競賽（一）　　8:30-13:00

二零一四年三月三十一日

1. 設 $f(x) = x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_1x + a_0$ 為實係數 n 次多項式 $(n \geq 2)$. 如果 $f(x) = 0$ 的根都是實根，試證每一根的絕對值都小於或等於 $\sqrt{\frac{2(1-n)}{n}a_{n-2}}$。

2. 給定正整數 k, 試求所有整係數多項式 $f(x)$, 使得對於所有正整數 n 都有 $f(n)$ 整除 $(n!)^k$, 此處 $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

3. 設 $\triangle ABC$ 的內切圓圓心為 I, 且該內切圓分別為 CA, AB 邊切於點 E, F. 令點 E, F 對 I 的對稱點分別為 G, H. 設點 Q 為 GH 與 BC 的交點，並設點 M 為 BC 的中點。證明 IQ 與 IM 垂直。

55^{th} IMO TST：第一階段選訓營

國立中央大學，台灣

模擬競賽（二）　　8:30-13:00

二零一四年四月一日

4. 在 $\triangle ABC$ 中，設點 D 在 BC 邊上且 AD 平分 $\angle BAC$, 並設 AD 的中點為 M。 設以 AC 為直徑 ω_1 與 BM 交於點 E, 以 AB 為直徑的圓 ω_2 與 CM 交於點 F。 證明 B, E, F, C 四點共圓。

5. 證明： 存在無窮多正整數 n, 使得 n^4+n^2+1 的最大質因數， 和 $(n+1)^4+(n+1)^2+1$ 的最大質因數相同。

6. 某國有數個城市，其中若干個城市之間有航線相連；航線都是雙向的。已知從該國中任選兩個城市，都可以從其中一個城市，透過一系列航線抵達另一個城市。 定義兩個城市的距離為從一個城市抵達另一個城市所需的最小航線數量。已知對於任何一個城市，至多都只有 100 個城市與其距離恰為 3。 試證：不存在一個城市，有超過 2550 個其他城市與其距離恰為 4。