55^{th} IMO TST：第三階段選訓營

國立中央大學，台灣

獨立研究（一）　　8:30-10:20

二零一四年四月二十六日

1. 給定 6×6 的方格，並記第一列六個方格座標為 $(1,1), (1,2), \ldots, (1,6)$, 其類似推。 對於任意的 $k = 0, 1, \ldots, 5$, 滿足 $i - j \equiv k \pmod 6$ 的六個格子 (i, j) 稱為在同一條的 (故共有六條對角線)。 試問：能否將 $1, 2, \ldots, 36$ 寫在 6×6 的方各中，同時滿足
   (1) 每一列的和都相等。
   (2) 每一行的和都相等。
   (3) 每一條對角線的和都相等。

2. 甲、乙兩人玩以下的數字遊戲：從甲開始，兩個人輪流自 1 到 9 的數字中不重複的選一個數字出來，並且把選出的數字由左依序成一個七位數（級 $\overline{A_1B_2A_3B_4A_5B_6A_7}$)。如果排出來的七位數是某個個完全齊次方數的末七位數字，則甲獲勝；否則的說，乙獲勝。
   請問誰有必勝策略？

$55^{\rm th}$ IMO TST：第三階段選訓營

國立中央大學，台灣

獨立研究（二）　　16:10-18:00

二零一四年四月二十六日

1. 在凸六邊形 $ABCDEF$ 中， $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$, 以及

$$AB + DE = BC + EF = CD + FA.$$

將邊 AB, BC, DE, EF 的中點分別記 A_1, B_1, D_1, E_1. 設點 O 為線段 A_1D_1 及 B_1E_1 的交點。 證明 $\angle D_1OE_1 = \frac{1}{2}\angle DEF$.

2. 令 m 是一不為 0 的整數。試求所有的實係數多項式函數 $P(x)$ 使得

$$\left(x^3 - mx^2 + 1\right) P(x+1) + (x^3 + mx^2 + 1)P(x-1) = 2(x^3 - mx + 1)P(x)$$

對所有的實數 x 均成為。

55^{th} IMO TST：第三階段選訓營

國立中央大學，台灣

獨立研究（三）　　14:00-15:50

二零一四年四月二十七日

1. 正整數 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 4)$ 依序排列在圓周上，任意 x_i 的左右鄰居之數字會是 x_i 本身的倍數，也就是分數
$$\frac{x_{i-1}+x_{i+1}}{x_i} = k_i$$
是一個整數，其中指定 $x_0 = x_n$, $x_{n+1} = x_1$. 試證：所有倍數和 $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ 滿足不等式
$$2n \leq k_1 + k_2 + \cdots + k_n < 3n.$$

2. 三角形 ABC 中， D 與 E 分別為角 A 和角 B 的角平分線與對邊的交點。將一菱形內接與四邊形 $AEDB$ 中，且菱形的定點分別位於 $AEDB$ 不同的邊上。 設 ϕ 為此菱形非鈍角的內角。 證明 $\phi \leq \max\{\angle BAC, \angle ABC\}$.

55^{th} IMO TST：第三階段選訓營

國立中央大學，台灣

模擬競賽（一）　　8:30-13:00

二零一四年四月二十八日

1. 令 $\mathbb{R}$ 表示實數所稱的集合。 定義集合 $S = \{1, -1\}$ 與函數 $\text{sign} : \mathbb{R} \to S$ 如下：

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0; \\ -1 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

給定奇數 n. 試問是否存在 $n^2 + n$ 個實數 $a_{ij}, b_i \in S$ $(1 \leq i \leq j \leq n)$, 使得任意 n 個數 $x_1, \ldots, x_n \in S$, 利用下式

$$y_i = \text{sign}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i\right), \quad \forall 1 \leq i \leq n;$$
$$z = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i b_i\right)$$

計算出對應的 z 值恆等於 $x_1 x_2 \ldots x_n$.

2. 試問：是否存在無窮多個整數 a_1, a_2, a_3, $\ldots$ 及正整數 N, 其中 $0 < a_i < 10$, 使得對於所有正整數 $k > N$,

$$\sum_{i=1}^{k} a_i 10^{i-1}$$

都是完全平方數？

3. 設點 M 為三角形 ABC 的外接圓上一點。 自 M 引對三角形 ABC 的內切圓相切的（兩條）直線，分別角 BC 於 X_1, X_2 證明三角形 MX_1X_2 的外接圓與 ABC 的外接圓的第二個（及不同於 M 的那個交點）就是 ABC 的與角 A 內的偽內接圓的切點。

$55^{\rm th}$ IMO TST：第三階段選訓營

國立中央大學，台灣

模擬競賽（二）　　8:30-13:00

二零一四年四月二十九日

4. 設三角形 ABC 中有 $\angle B > \angle C$. 設點 P 和 Q 為直線 AC 上相異兩點，滿足 $\angle PBA = \angle QBA = \angle ACB$, 且 A 點位於 P 與 C 點之間。 在線段 BQ 取一點 D 使得 $PD = PB$. 令射線 AD 與 $\triangle ABC$ 的外接圓交於 R 點 $(R \neq A)$. 證明 $QB = QR$.

5. 令 n 是以正整數， 考慮以正整數 $a_1, a_2, \ldots, a_n$. 將此數列延伸為有周期的無窮數列，對每個 $i \geq 1$ 都定義 $a_{n+1} = a_i$. 若
$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_1 + n$$
且對於 $i = 1, 2, \ldots, n$ 都有
$$a_{a_i} \leq n + i - 1$$
試證
$$a_1 + \cdots + a_n \leq n^2.$$

6. 甲、乙兩人在實數線上玩以下著色遊戲。甲有一桶顏料四單位，其中 p 單位的顏料剛好可以塗滿以長度為 p 的閉區間。 每回合，甲先指定一個正整數 m, 並給乙 $\frac{1}{2^m}$ 單位的顏料。 接，乙選整數 k, 並將 $\frac{k}{2^m}$ 到 $\frac{k+1}{2^m}$ 塗滿（此區間可能有一部分在之間的回合中已經被塗過）。 如果桶子空了但 $[0,1]$ 區間還沒被塗滿，則甲獲勝。
試問：甲是否有在有限回合內獲勝的必勝法？