

第十五屆 每個人最多只能活一次

林肯市，內布拉斯加州

第一天 8:00-12:30

二零一三年六月十五日

1. 令  $a_1, a_2, \dots, a_9$  為九個實數，不必相異，具有平均  $m$ 。令  $A$  為有序三元  $1 \leq i < j < k \leq 9$  使得  $a_i + a_j + a_k \geq 3m$  的數量。試求： $A$  的最小值。
2. 令  $a, b, c$  為正實數，使得  $a + b + c = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ 。試證： $a^a b^b c^c \geq 1$ 。
3. 令  $m_1, m_2, \dots, m_{2013} > 1$  為兩兩互質正整數，具  $A_1, A_2, \dots, A_{2013}$  為 2013 個集合(可以是空集合)，使得對於  $i = 1, 2, \dots, 2013$ ， $A_i \subseteq \{1, 2, \dots, m_i - 1\}$ 。試證：存在一個正整數  $N$  滿足

$$N \leq (2|A_1| + 1)(2|A_2| + 1) \dots (2|A_{2013}| + 1)$$

並且對於  $i = 1, 2, \dots, 2013$ ，不存在  $a \in A_i$  使得  $m_i$  整除  $N - a$ 。

第十五屆 每個人最多只能活一次

林肯市，內布拉斯加州

第二天 8:00-12:30

二零一三年六月十六日

4. 三角形  $ABC$  內接於一個圓  $\omega$ 。一個通過點  $B, C$  的圓與邊  $AB, AC$  分別交於點  $S$  和  $R$ 。線段  $BR$  和  $CS$  交於點  $L$ ，且  $D$  和  $E$  分別為  $\omega$  與射線  $LR, LS$  的交點。角  $\angle BDE$  的內角平分線與直線  $ER$  交於點  $K$ 。試證：若  $BE = BR$ ，則  $\angle ELK = \frac{1}{2}\angle BCD$ 。
5. 求出所有的系數為整數的多項式  $P(n)$ ，使得在  $\mathbb{R}^3$  裡，可以在每一個陣點上寫一個正整數根據以下的條件：對於任何正整數  $n$ ，每一個  $n \times n \times n$  格的  $n^3$  陣點寫的整數的總和是  $P(n)$  的倍數。
6. 考慮一個函數  $f$  從整數映到整數使得對於任何非負整數  $n$ ，頂多有  $0.001n^2$  的有序對  $(x, y)$  滿足  $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$  和  $\max\{|x|, |y|\} \leq n$ 。決定可不可能有一個整數  $n \geq 0$  使得有超過  $n$  個正整數  $a$  滿足  $f(a) \neq a \cdot f(1)$  和  $|a| \leq n$ 。